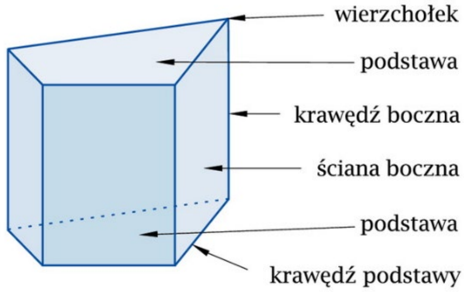
IV. GEOMETRIA PRZESTRZENNA

Graniastosłup to wielościan posiadający dwie identyczne i równoległe podstawy oraz ściany boczne będące równoległobokami.



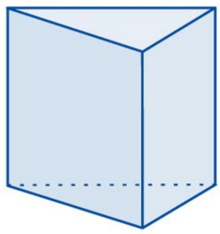
Jeśli podstawy graniastosłupa są trójkątami, to nazywamy go graniastosłupem trójkątnym, jeśli czworokątami, to czworokątnym itd.

Graniastosłup czworokątny
ma 12 krawędzi, 8 wierzchołków i 6 ścian.

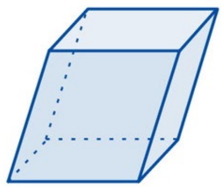
	krawędzie	wierzchołki	ściany
Graniastosłup n-kątny:	$3n$	$2n$	$n+2$

Gdy krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw, to taki graniastosłup nazywamy **prostym**. Ściany boczne w graniastosłupie prostym są prostokątami.

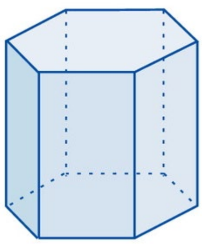
Gdy krawędzie boczne nie są prostopadłe do podstaw, to taki graniastosłup nazywamy **pochyłym**. Jego ściany boczne są równoległobokami, ale nie są prostokątami.



graniastosłup prosty trójkątny



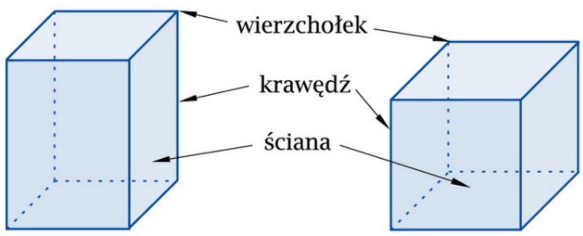
graniastosłup pochyły czworokątny



graniastosłup prawidłowy sześciokątny

Graniastosłup prosty, którego podstawą jest wielokąt foremny (np. trójkąt równoboczny, kwadrat, pięciokąt foremny), nazywamy **prawidłowym**. W graniastosłupie prawidłowym ściany boczne są przystającymi prostokątami.

Szczególnymi graniastosłupami są **prostopadłościany** i **sześciany**.
Ściany prostopadłościanu to prostokąty, zaś ściany sześcianu to przystające kwadraty.

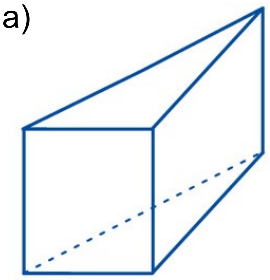


prostopadłościan sześcian

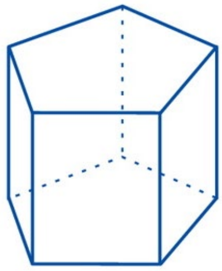
Sześcian jest **bryłą foremną**.

Zad.1. Ile krawędzi, ścian i wierzchołków mają narysowane poniżej graniastosłupy?

a)



b)



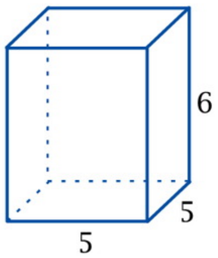
Zad.2. a) Ile krawędzi ma graniastosłup o 16 wierzchołkach?

b) Ile ścian ma graniastosłup o 30 krawędziach?

c) Ile wierzchołków ma graniastosłup o 20 ścianach?

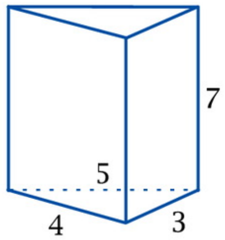
Zad.3. Oblicz sumy długości krawędzi narysowanych graniastosłupów.

a)



graniastosłup prawidłowy czworokątny

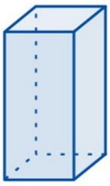
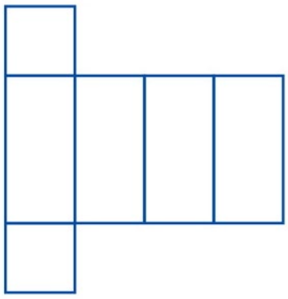
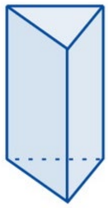
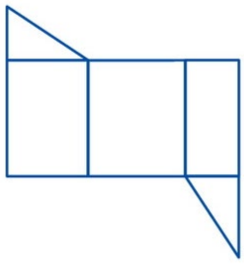
b)



graniastosłup prosty trójkątny

POLE POWIERZCHNI GRANIASTOSŁUPA:

Pole powierzchni graniastosłupa, jest równe polu jego siatki. Jest to suma pól dwóch podstaw i pola powierzchni bocznej. Pole boczne to suma pól wszystkich ścian bocznych.

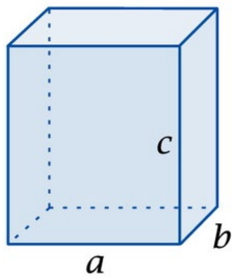





$\boxed{P_c = 2P_p + P_b}$ – wzór na pole powierzchni graniastosłupa

P_C – pole powierzchni całkowitej

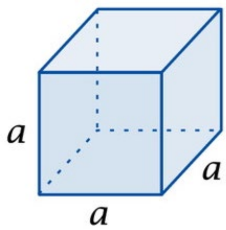
P_p – pole podstawy

P_b – pole powierzchni bocznej (suma pól ścian bocznych)



W prostopadłościanie wszystkie ściany są prostokątami. Jeżeli z każdego wierzchołka wychodzą krawędzie o różnych długościach a, b i c, to taki prostopadłościan ma równoległe ściany parami identyczne. Stąd pole powierzchni całkowitej możemy obliczyć jako:

$$P_C = 2ab + 2bc + 2ac$$



W sześcianie wszystkie ściany są identycznymi kwadratami o długości boku a. Stąd pole powierzchni całkowitej możemy obliczyć jako:

$$P_C = 6a^2$$

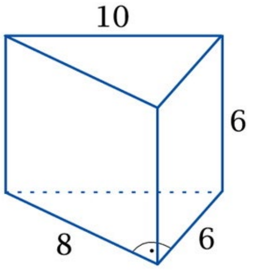
Zad.4. Oblicz pole całkowite:

a) prostopadłościanu o wymiarach 3 cm × 4 cm × 5 cm

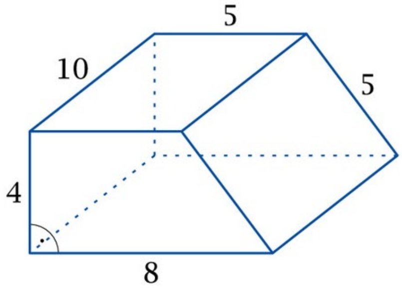
b) szescianu o krawędzi długości 2 cm

Zad.5. Na rysunkach przedstawione są graniastosłupy proste. Oblicz ich pola powierzchni.

a)

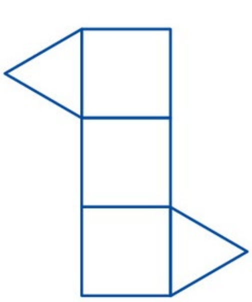


b)

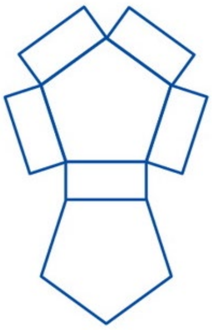


Zad.6. Nazwij graniastosłupy, których siatki narysowano poniżej.

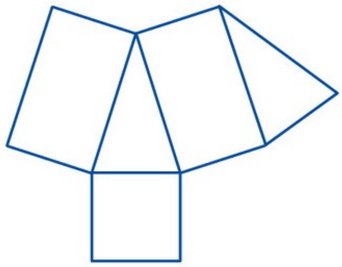
a)



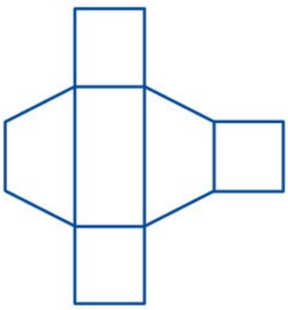
b)



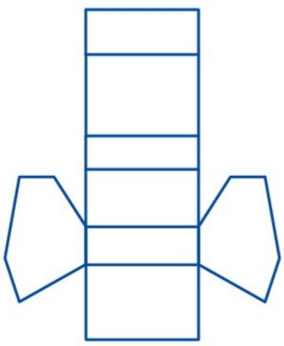
c)



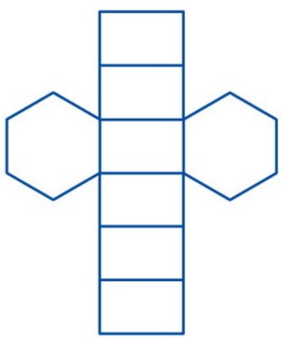
d)



e)

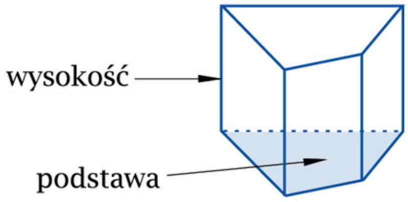


f)



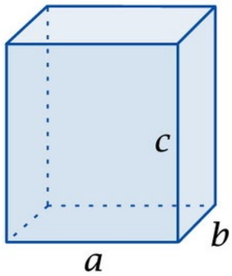
OBJĘTOŚĆ GRANIASTOSŁUPA:

Objętość jest miarą przestrzeni jaką zajmuje dana bryła. Objętość graniastosłupa obliczamy mnożąc pole podstawy przez wysokość graniastosłupa.



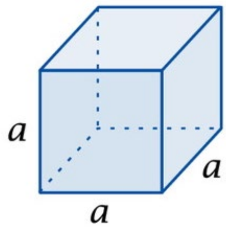
$$\boxed{V = P_p \cdot H}$$ – wzór na objętość graniastosłupa

P_p – pole podstawy graniastosłupa
H – wysokość graniastosłupa



Objętość prostopadłościanu obliczymy jako iloczyn długości krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka:

$$V = abc$$

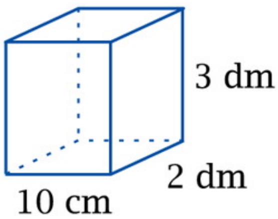


Sześcian jest prostopadłościanem o krawędziach jednakowej długości, więc objętość obliczymy wzorem:

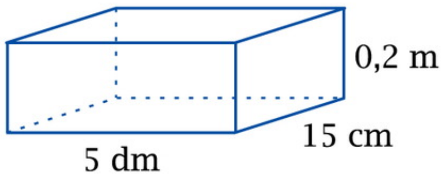
$$V = a^3$$

Zad.7. Oblicz objętość prostopadłościanów przedstawionych na rysunkach.

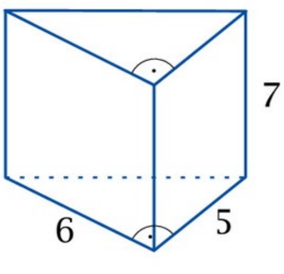
a)



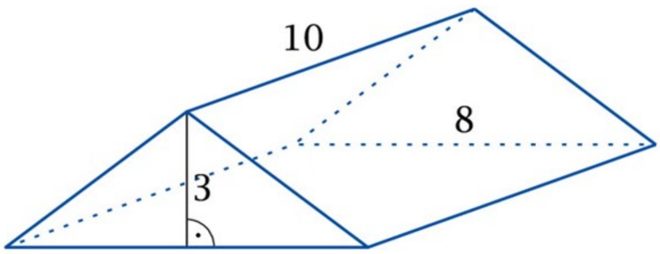
b)



Zad.8. Na rysunku przedstawiony jest graniastosłup prosty. Oblicz jego objętości.



Zad.9. Jaką objętość ma przedstawiony na rysunku graniastosłup prosty?



JEDNOSTKI OBJĘTOŚCI:

Zależności między jednostkami objętości wynikają z zależności między jednostkami długości:

1 m = 100 cm więc 1 m^3 = $(100\ cm)^3$ = 1 000 000 cm^3

1 dm = 10 cm więc 1 dm^3 = $(10\ cm)^3$ = 1 000 cm^3

1 cm = 10 mm więc 1 cm^3 = $(10\ mm)^3$ = 1 000 mm^3

Objętość płynów często przedstawia się w litrach, mililitrach, centylitrach lub hektolitrach:

1 *l* = 1 dm^3 = 1000 cm^3 * 1 cl = 0,01 *l* = 10 cm^3

1 ml = 1 cm^3 = 0,001 *l* 1 hl = 100 *l*

Zad.10. Wyraź podane objętości we wskazanej jednostce.

a) 3 dm^3 = ... cm^3

d) 7 cm^3 = ... ml

b) 2 m^3 = ... dm^3

e) 4 cm^3 = ... *l*

c) 5 dm^3 = …............ *l*

f) 350 ml = ... dm^3

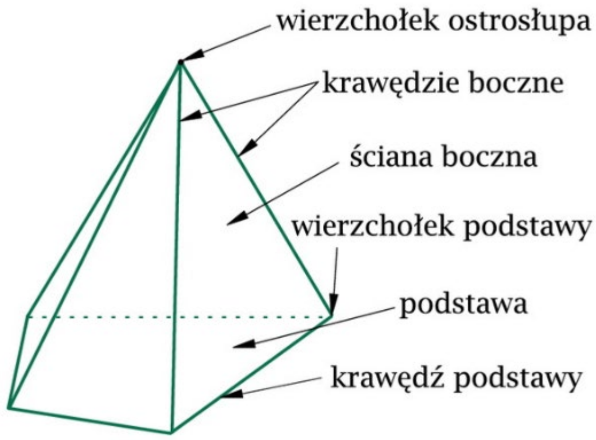
Ostrosłup to wielościan posiadający jedną podstawę oraz ściany boczne będące trójkątami.

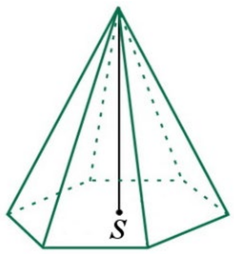
Wierzchołkiem ostrosłupa nazywamy wspólny wierzchołek ścian bocznych.

Jeśli podstawą ostrosłupa jest trójkąt, to nazywamy go ostrosłupem trójkątnym, jeśli jest czworokąt, to czworokątnym itd.

Ostrosłup czworokątny ma:
8 krawędzi, 5 wierzchołków i 5 ścian.

	krawędzie	wierzchołki	ściany
Ostrosłup n-kątny:	$2n$	$n+1$	$n+1$



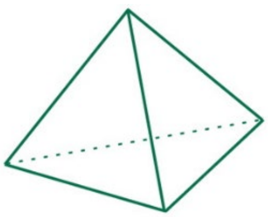


ostrosłup prawidłowy sześciokątny

Spodek wysokości, to punkt wspólny wysokości i płaszczyzny podstawy.

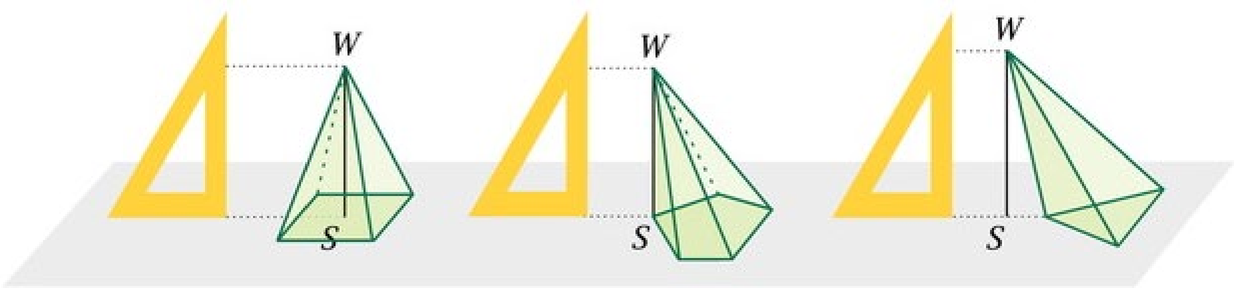
Ostrosłup o równych krawędziach bocznych jest nazywany **prostym**, a gdy krawędzie nie są równe – **pochyłym**. Jeśli ostrosłup prosty ma w podstawie figurę foremną, to taki ostrosłup nazywamy **prawidłowym**.

W ostrosłupie prawidłowym ściany boczne są przystającymi (identycznymi) trójkątami równoramiennymi, a spodek wysokości leży w równej odległości od wierzchołków podstawy.


czworościan foremny

Szczególnym ostrosłupem prawidłowym jest **czworościan foremny**. Jest to ostrosłup zbudowany z czterech przystających trójkątów równobocznych.

Wysokość ostrosłupa poprowadzona jest z wierzchołka do płaszczyzny podstawy i jest prostopadła do tej płaszczyzny. Zatem w zależności od rodzaju ostrosłupa spodek wysokości może zawierać się w podstawie albo leżeć poza nią.

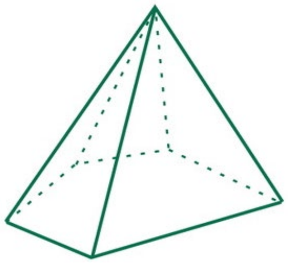


ostrosłup prosty

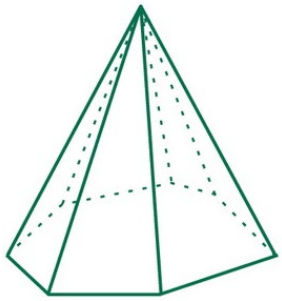
ostrosłupy pochyłe

Zad.11. Ile krawędzi, wierzchołków i ścian mają narysowane poniżej ostrosłupy?

a)



b)



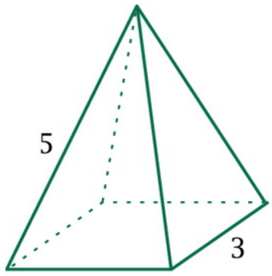
Zad.12. a) Ile ścian ma ostrosłup o 20 krawędziach?

b) Ile wierzchołków ma ostrosłup o 30 krawędziach?

c) Ile krawędzi ma ostrosłup o 15 wierzchołkach?

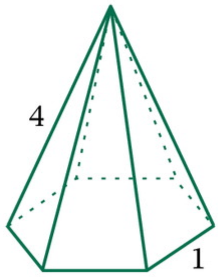
Zad.13. Oblicz sumy długości krawędzi narysowanych ostrosłupów.

a)



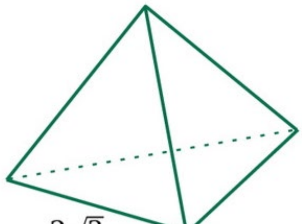
ostrosłup prawidłowy czworokątny

b)



ostrosłup prawidłowy sześciokątny

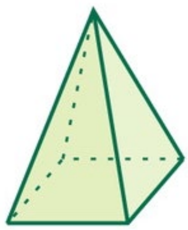
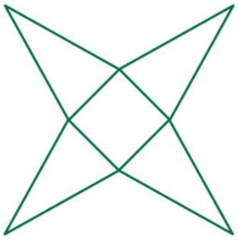
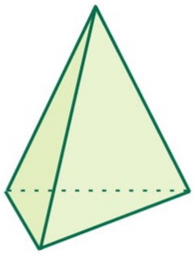
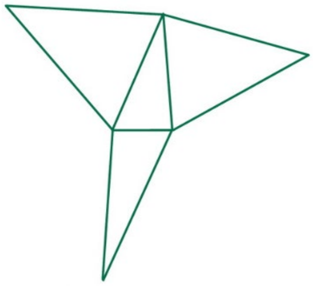
c)



czworościan foremny

Pole powierzchni ostrosłupa :

Pole powierzchni ostrosłupa, jest równe polu jego siatki. Jest to suma pola podstawy i pola powierzchni bocznej. Pole boczne to suma pól wszystkich ścian bocznych.

$\boxed{P_c = P_p + P_b}$ – wzór na pole powierzchni ostrosłupa

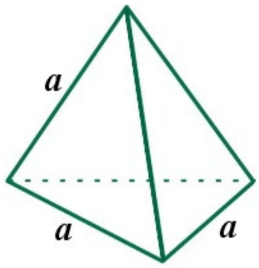
P_C – pole powierzchni całkowitej

P_p – pole podstawy

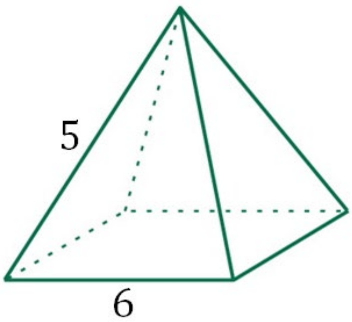
P_b – pole powierzchni bocznej (suma pól ścian bocznych)

W czworościanie foremnym wszystkie ściany są identycznymi trójkątami równobocznymi o długości boku a. Stąd pole powierzchni całkowitej możemy obliczyć jako:

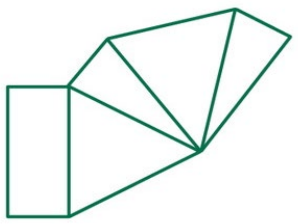
$$^{*}\,P_C = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

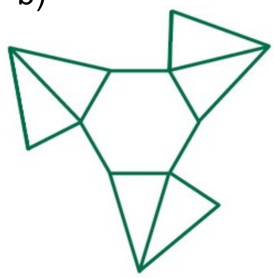


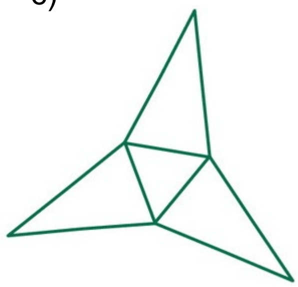
Zad.14. Oblicz pole powierzchni narysowanego ostrosłupa prawidłowego.



Zad.15. Nazwij ostrosłupy, których siatki narysowano poniżej.

a) 

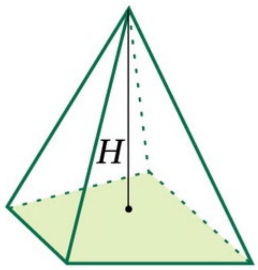
b) 

c) 

d) 

OBJĘTOŚĆ OSTROSŁUPA :

Objętość ostrosłupa jest trzy razy mniejsza niż objętość graniastosłupa o takiej samej podstawie i wysokości.

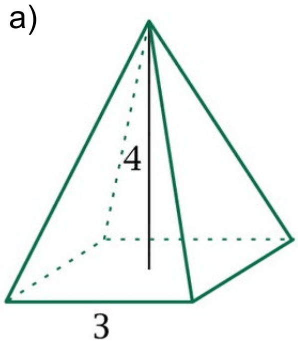


$$\boxed{V = \frac{1}{3} P_p \cdot H}$$ – wzór na objętość ostrosłupa

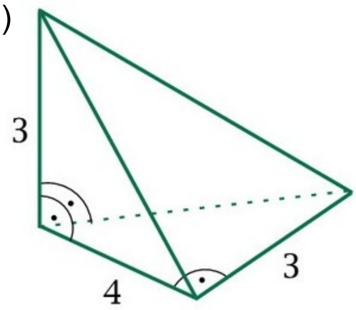
P_p – pole podstawy ostrosłupa

H – wysokość ostrosłupa

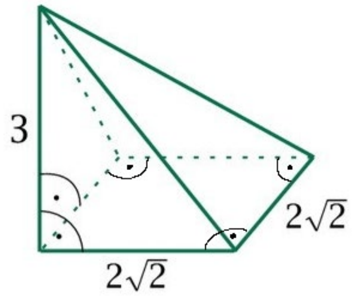
Zad.16. Oblicz objętości narysowanych ostrosłupów.

a) 

ostrosłup prawidłowy czworokątny

b) 

ostrosłup trójkątny

c) 

ostrosłup czworokątny